جداول المنافع

د. مصطفى بابكر

جداول المنافع والفرص الضائعة ومعايير اتخاذ القرار تحت ظروف اللايقين

جداول المنفعة (Payoff Tables)

- تنطوي عملية اتخاذ القرار على اختيار فعل واحد من جملة من الأفعال الممكنة ولكي يتسنى ذلك لا بد من تحديد كل الأفعال المتاحة أولا. أمثلة لذلك قد يواجه المستثمر جملة الخيارات التالية:

1. أي الأوراق المالية، الأسهم أو السندات يمكن الاستثمار فيها .
2. هل تدخل سلعة جديدة للسوق.
3. أي الطرق تستخدم لإنتاج هذه السلعة.

فيما يلي سنرمز لهذه الأفعال المختلفة بـ $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ ونحسب لكل فعل المنفعة المرتبطة به.

- لا يمكن أن نحدد أي الأفعال التي يمكن اتخاذها هو الأحسن ما لم نعرف على اليقين كل العوامل المؤثرة على المنفعة المرتبطة بأي من هذه الأفعال. لكن في الحقيقة أن عملية اتخاذ القرار في ظل اللايقين يكتنفها عوامل خارج دائرة تحكمنا تؤثر على المنفعة المرتبطة بالفعل المعين ولذلك لا بد من الاحتياط بإحصاء كل هذه العوامل. وتسمى هذه العوامل أو الظروف بحالات الطبيعية (States of Nature) ونرمز لها بـ $s_1, s_2, \ldots s_k$.

- في حالة اتخاذ القرار في ظل اليقين تكون حالة الطبيعة معروفة لدينا ولذلك نختار من الأفعال الممكنة فقط حسب تقييمنا للمنفعة المرتبطةٍ بها . غير أنه في حالة اتخاذ القرار في ظل اللايقين لا نعرف مقدما حالة الطبيعة ولذلك لا يمكن الاختيار من الأفعال الممكنة بناءً على المنافع المرتبطة بها فقط. مثلاً إذا أراد مزارع ما تحديد أي المحصولين A و B يزرع تكون الأفعال الممكنة هي (A, B) غير أن ربح أو خسارة المزارع لا تعتمد فقط على نوع ومقدار المحصول ولكن على جملة من العوامل الخارجة عن إرادته كظروف الطقس، أسعار المحصول عند الحصاد، تكاليف العمالة وغيرها وعليه فإن حالات الطبيعة لهذا المزارع تشتمل على كل هذه العوامل. لذلك لا يمكن للمزارع أن يقدر مقدار ربحه على وجه اليقين حيث أنه لا يعلم حالات الطبيعة ساعة قراره بزراعة المحصول.

- يرمز للمنفعة المرتبطة بالفعـل عند حدوث حالة الطبيعة s_j بـ π_{ij} حيث $i = 1,2,...,n$ و $j = 1,2,...,k$ وتبوب هذه المنافع في شكل قوائم تسمى جداول المنفعة (Payoff Tables) كما يبينها الشكل أدناه:

		State of Nature (حالة الطبيعة)				
Action (الفعل)		s_1	s_2	s_3	...	s_k
	a_1	π_{11}	π_{12}	π_{13}	...	π_{1k}
	a_2	π_{21}	π_{22}	π_{23}	...	π_{2k}
	a_3	π_{31}	π_{32}	π_{33}	...	π_{3k}
	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
	a_n	π_{n1}	π_{n2}	π_{n3}	...	π_{nk}

مثال 1:

تود شراء 100 سهم من أحد أربعة أنواع من الأسهم بالسعر الجاري والذي يساوي 10 دولار للسهم الواحد لأي من الأسهم. لا يدفع أي من السندات أرباح للعام القادم لذلك تريد أن تشتري السند ذو السعر الأعلى العام القادم. غير أن أسعار الأسهم تعتمد على عدة ظروف اقتصادية كمعدلات أسعار الفائدة، معدلات التضخم والحالة العامة للاقتصاد لذلك فأنت تواجه مشكلة اتخاذ قرار في ظروف اللايقين. من بين العوامل المختلفة ترى أن معدل التضخم هو العامل الأساسي في تحديد أسعار الأسهم. هنالك ثلاثة حالات لمعدل التضخم العام القادم: أن يزيد، أن يكون على ما عليه اليوم، أو أن يقل ولنرمز لهذه الحالات بـ s_1، s_2، s_3 على التوالي. ويوضح الجدول أدناه المنفعة المرتبطة بالأنواع الأربعة للأسهم والحالات الثلاثة للتضخم:

	State of Nature (حالة الطبيعة)			
Action (الفعل)	Stock 1	-500	-100	200
	Stock 2	0	300	400
	Stock 3	500	-300	600
	Stock 4	1000	600	-100

- نلاحظ من جدول المنفعة أنه ليس هنالك خيار أمثل في كل حالات الطبيعة، حيث أن الخيار Stock 4 هو الأمثل في حالة s_1، s_2 وفي حالة أيضا خيار Stock 4 هو الأمثل ولكن في حالة s_2نلاحظ أن خيار Stock 3 هو الأمثل. غير أننا أيضا نلاحظ أن خيار Stock 2 أفضل من خيار Stock 1 في جميع حالات الطبيعة حيث تفوق منفعته منفعة الخيار Stock 1 وعليه فإن Stock 1 لا يمكن أن يكون الخيار الأمثل أبدا ويقال في هذه الحالة أن خيار Stock 1 متغلب عليه (Dominated) بخيار Stock 2. وفي العموم يقال أن الفعل a_j متغلب على الفعل a_i إذا كان $\pi_{jk} \geq \pi_{ik}$ في كل حالات الطبيعة $k = 1,2,\ldots,K$ والقاعدة العامة في مسائل القرار تحت ظروف اللايقين هي حذف الأفعال المتغلب عليها من تحليل جداول المنفعة لأنها لا يمكن أن تكون الأفعال المثلى على الإطلاق.

مثال 2:

يجب أن يقرر بائع فاكهة في كل صباح كم كرتونة فاكهة يشتري لذلك اليوم حيث يشتري الكرتونة بـ 3 دينارات ويبيعها بـ 5 دنانير ليربح دينارين في الكرتونة الواحدة. غير أنه يضطر لبيع المتبقي آخر اليوم بسعر دينار للكرتونة لجمعية خيرية أي بخسارة دينارين. حيث أنه يشتري بالجملة يقتضي اتفاقه مع تجار الجملة أن يكون حجم الطلبية 5، 10، أو 15 كرتونة وفي الجانب الآخر يتراوح الطلب اليومي للفاكهة في متجره بين 6، 11 و 14 كرتونة في اليوم. المطلوب هو إيجار جدول المنفعة لهذا الفكهاني والخيارات التي تواجهه.

الحلِ:

أولاً يجب تحديد الأفعال الممكنة وحالات الطبيعية. تمثل الأفعال حجم الطلبية أي أن هنالك ثلاثة أفعال ممكنة هي 5 كرتونة، 10 كرتونة و 15 كرتونة. أما حالات الطبيعة فتمثلها مستويات الطلب وهي 6 كرتونة، 11 كرتونة و 15 كرتونة.

لنوضح كيفية حساب جدول المنفعة خذ مثلاً حجم الطلبية 10 وعليه تكون التكلفة الكلية للفكهاني 30 دينار. في حالة مستوى الطلب 6 يبيع الفكهاني 6 كرتونة بسعر 5 دينار والمتبقي (4 كرتونة) بسعر دينار واحد للكرتونة أي أن جملة أرباحه تساوي 4 دينار. في حالة مستوى الطلب 11 يبيع الفكهاني 10 كرتونة بسعر الكرتونة 5 دينار ويربح 20 دينار وكذلك الحالة في حالة مستوى الطلب 14. وباتباع هذه الطريقة في حساب الربح لكل الخيارات وحالات الطبيعة نحصل على جدول المنفعة أدناه للفكهاني:

State of Nature

(حالة الطبيعة)

Action (الفعل)		Demand of 6	Demand of 11	Demand of 14
	Order 5	10	10	10
	Order 10	4	20	20
	Order 15	-6	14	26

- نلاحظ من جدول المنفعة أنه لا يوجد خيار أمثل في كل حالات الطبيعة للفكهاني وعليه لا بد من وجود معيار أو طريقة لاختيار الطلبية المثلى للفكهاني في ظل هذه الظروف.

الفرص الضائعة

د. مصطفى بابكر

الفرص الضائعة (Opportunity Loss)

- الطريقة الثانية لتمثيل المنفعة هي استخدام جداول الفرص الضائعة. وتعرف الفرصة الضائعة بأنها الخسارة الناتجة من اتخاذ فعل معين مقارنة بالفعل الأمثل في ظل الحالة الراهنة لعدم اليقين. مثلاً افترض اختيار الفعل a_i في حدوث حالة الطبيعة s_j فإن المنفعة الناتجة هي π_{ij}. افترض أن الفعل a_m هو الفعل الأمثل إذا عرفنا أن حالة الطبيعة هي s_j مسبقا والمنفعة الناتجة هي π_{mj}. تمثل الخسارة الناتجة من اتخاذ a_i بدلا عن a_m قيمة الفرصة الضائعة. أي:

$$L_{ij} = \pi_{mj} - \pi_{ij}$$

- يتضح من تعريف الفرصة الضائعة أعلاه أن تكلفة الفرصة الضائعة تساوي صفر إذا كان الفعل الذي تم اتخاذه في حالة عدم اليقين هو الأمثل وتكون التكلفة موجبة للأفعال الأخرى.

- يمكن إيجاد جدول الفرص الضائعة من جدول المنفعة بطرح المنفعة π_{ij} من أعلى منفعة في نفس العمود. أي:

$$L_{ij} = \max_k \pi_{kj} - \pi_{ij}$$

مثال 3:

أوجد جدول الفرص الضائعة من جدول المنفعة للمثال 1.

الحل:

خذ مثلاً s_1 فإن المنفعة المثلى هي 1000. بطرح كل أفراد العمود المقابل لـ s_1 من 1000 نحصل على $L_{11}=1500$ ، $L_{21}=1000$ ، $L_{31}=500$ $L_{41}=0$ وباتباع نفس الطريقة في معالجة الأعمدة الأخرى نحصل على جدول الفرص الضائعة أدناه:

		State of Nature (حالة الطبيعة)		
Action (الفعل)		s_1	s_2	s_3
	Stock 1	1500	700	400
	Stock 2	1000	300	200
	Stock 3	500	900	0
	Stock 4	0	0	700

معايير اتخاذ القرار تحت ظروف اللايقين

د. مصطفى بابكر

معايير اتخاذ القرار تحت ظروف اللايقين

(Criteria for Making Decisions Under Uncertainty)

- يمكن تصنيف مسائل اتخاذ القرار حسب درجة معرفتنا بحالة الطبيعة التي ستحدث عند تطبيق القرار. ٍ فهنالك اتخاذ القرار في ظل اليقين حيث تعرف حالة الطبيعة مسبقا وعليه يسهل على متخذ القرار تحديد الفعل الذي يعظِم أرباحه. وهنالك اتخاذ القرار في ظل اللايقين حيث لا نعرف مسبقا حالة الطبيعة التي ستحدث عند تطبيق القرار ويمكن أن نبين حالتين لاتخاذ القرار في ظل هذه الظروف.

الحالة الأولى يكون احتمال حدوث أي حالة للطبيعة معروف من النظرية، دراسات سابقة، أو من الإحساس الذاتي لمتخذ القرار والحالة الثانية لا نعرف فيها احتمال حدوث أي من حالات الطبيعة. وتقع معظم مسائل اتخاذ القرار تحت ظروف اللايقين بين هاتين الحالتين حيث يكون لدينا معرفة غير تامة عن حدوث حالات الطبيعة ويمكن الاستفادة من المعلومات المحدودة المتوفرة لدينا في الحصول على تقدير ذاتي لاحتمالات حالات الطبيعة.

- أشهر المعايير المستخدمة في اختيار الأفعال المثلى في ظل ظروف اللايقين تتمثل في أعظم- الأعظم أو Maximax، أعظم- الأقل أو Maximin ، أقل- الأعظم أو Minimax، لابلاس (Laplace)، القيمة النقدية المتوقعة أو The Expected Monetary Value، التكلفة المتوقعة للفرصة الضائعة أو Expected Opportunity Loss ، والمنفعة المتوقعة أو Expected Utility.

1. معيار أعظم- الأعظم (Maximax Criterion)

تبعاً لهذا المعيار نختار الفعل ذو المنفعة الكبرى ويمثل معيار المتفائل حيث يتوقع حدوث حالة الطبيعة التي تعطي أعظم ربح ممكن. وبتطبيق هذا المعيار على المثال 1 نختار السند رقم 4 (Stock 4) حيث يعطي 1000 دولار وهي أعلى منفعة ممكنة في جدول المنافع للمثال.

2. معيار أعظم- الأقل (Maximin Criterion)

تبعاً لهذا المعيار يتم إيجاد أقل منفعة لكل فعل ثم نختار من جملة أقل المنافع الفعل ذو المنفعة الكبرى. ويمثل هذا المعيار وجهة نظر متخذ القرار المتشائم حيث عند حدوث أسوأ الظروف يعطيه هذا المعيار أقل الخسائر. وبتطبيق هذا المعيار على المثال ١ نجد أقل منفعة لخيار Stock 1 هي 500-، لـ Stock 2 هي ٠، لـ Stock 3 هي 300-، ولـ Stock 4 هي 100-. عليه فإن الخيار Stock 2 هو الأمثل حيث في أسوأ الظروف نحصل على الربح ٠. ويجب أن ننوه أن هذا المعيار ليس بدرجة عدم الواقعية التي قد تتبادر إلى الذهن حيث في بعض الحالات يكون من الضروري لرجل الأعمال أن يتخذ مثل هذه الاستراتيجية ليتفادى خسارة كبيرة ممكنة أو أن يضمن أقل ربح ممكن.

3. معيار أقل- الأعظم (Minimax Criterion)

تبعاً لهذا المعيار يتم إيجاد أعظم الفرص الضائعة لكل فعل ومن ثم نختار الفعل ذو أصغر فرصة ضائعة. وبتطبيق هذا المعيار على المثال 3 نجد أن قيمة أكبر فرصة ضائعة للفعل Stock 1 هي 1500، لـ Stock 2 هي 1000، لـ Stock 3 هي 900 و لـ Stock 4 هي 700. وبناءً على المعيار أعلاه يكون الفعل الأمثل هو اختيار Stock 4. هذا ويلاحظ أن معيار Minimax هو أيضا معيار متشائم.

4. معيار لابلاس (Laplace Criterion)

في حالة عدم معرفة متخذ القرار بفرص حدوث حالات الطبيعة قد يكون الافتراض الأمثل هو إعطاء كل حالات الطبيعة نفس احتمال الحدوث. هذه فكرة لابلاس حيث اقتراح إعطاء كل المنافع في الجدول فرص متساوية وعليه بنى معياره على أخذ متوسط المنفعة لكل فعل ومن ثم اختيار الفعل ذو أكبر منفعة متوقعة (أو أعلى متوسط منفعة). بتطبيق المعيار على المثال 2 نجد أن متوسط الأرباح للطلبية 5 هو 10 دينار، للطلبية 10 هو 14.67 وللطلبية 15 هو 11.33 وعليه فإن الفعل الأمثل هو الطلبية 10. هذا وتعتبر أهم ميزات معيار لابلاس هو استخدامه لكل المعلومات في جدول المنافع غير أن إعطائه فرص متساوية لحالات الطبيعة قد لا يكون من الحكمة في بعض الحالات.

5. معيار القيمة النقدية المتوقعة
(Expected Monetary Value Criterion- EMV)

يعرف هذا المعيار أيضاً بمعيار بيز Bayes . وليتسنى لنا استخدام هذا المعيار لابد من تحديد احتمال حدوث أي من حالات الطبيعة حيث يكون جملة احتمالات حدوث الحالات المختلفة مساوية للواحد الصحيح. وتكون هذه الاحتمالات إما موضوعية ناتجة عن معرفة بحالات الطبيعة أو ذاتية ناتجة عن الإحساس الشخصي لمتخذ القرار حول فرص حدوث الحالات المختلفة للطبيعة. وتسمى هذه الاحتمالات بالاحتمالات المسبقة (Prior Probabilities) ويرمز لها بـ P_j حيث j تشير إلى حالات الطبيعة.

تبعاً لهذا المعيار يتم اختيار الفعل ذو أعلى قيمة نقدية متوقعة وتحسب القيمة النقدية المتوقعة EMV بالقانون:

$$EMV\ (a_i) = \sum_{j=1}^{k} \pi_{ij} P_j$$

ولتطبيق هذا المعيار على المثال ١ افترض أنه بناءً على معرفة المستثمر وإحساسه الشخصي فإن الاحتمالات المسبقة لحالات الطبيعة

s_1 ، s_2 ، s_3 على التوالي هي 0.5، 0.3، 0.2. باستخدام القانون أعلاه نجد أن القيمة المتوقعة لـ Stock 1 هي 240–، لـ Stock 2 هي 170، لـ Stock 3 هي 280 و لـ Stock 4 هي 660. إذن تبعاً لمعيار القيمة النقدية المتوقعة يكون الخيار الأمثل هو Stock 4.

6. معيار التكلفة المتوقعة للفرصة الضائعة
(Expected Opportunity Loss Criterion)

تبعاً لهذا المعيار نختار الفعل ذو أقل تكلفة متوقعة للفرص الضائعة وتحسب التكلفة المتوقعة للفرصة الضائعة EOL حسب القانون:

$$EOL(a_i) = \sum_{j=1}^{k} L_{ij} P_i$$

وبتطبيق هذا القانون على المثال 3 مستخدمين الاحتمالات المسبقة في المثال السابق نجد أن التكلفة المتوقعة للفرص الضائعة للفعل Stock 1 هي 1040، لـ Stock 2 هي 630 ، لـ Stock 3 هي 520 و لـ Stock 4 هي 140. عليه وبناءً على معيار التكلفة المتوقعة للفرص الضائعة فإن Stock 4 هو الخيار الأمثل.

القيمة المتوقعة للمعرفة التامة
(Expected Value of Perfect Information)

- تمثل القيمة المتوقعة للمعرفة التامة EVPI أكبر مقدار من النقود يمكن إنفاقه للحصول على المعرفة التامة لحالة الطبيعة التي ستحدث. وتحسب تبعا للقانون الآتي:

$$EVPI = \sum_{j=1}^{k} P(s_j) \max_i \pi_{ij} - \max_i \left[\sum_{j=1}^{k} P(s_j) \pi_{ij} \right]$$

حيث يمثل الجزء الأول من التعبير في الناحية اليمنى للمعادلة القيمة المتوقعة للأرباح إذا عرفت حالة الطبيعة مسبقا ويمثل الجزء الثاني من التعبير أعلى قيمة نقدية متوقعة تحت ظروف عدم معرفة حالة الطبيعة مسبقا .

- لتطبيق حساب القيمة المتوقعة للمعرفة التامة على المثال 1 وللاحتمالات المسبقة في الأمثلة السابقة نوجد الجزء الأول من التعبير حيث أعلى منفعة في حالة s_1 هي 1000 ، في حالة s_2 هي 600 وفي حالة s_3 هي 600 والقيمة المتوقعة هي 800. ثم نوجد الجزء الثاني من مثال معيار القيمة النقدية المتوقعة وهو 660 وعليه فإن القيمة المتوقعة للمعرفة التامة تساوي 140.